* * *

Análisis de un modelo dinámico sectorial

José Ramón Guzmán•

Se analiza un sistema dinámico de tiempos discretos que modela una economía sectorial de precios y cantidades. Se muestra numéricamente un ejemplo a cuatro sectores en el que para algunos valores de los parámetros el modelo es predictible y para otros el modelo es caótico.*

Analysis of a dynamic intersectorial model

A dynamic system of discrete times, that models a sectorial economy of prices and quantities, is analyzed. Numerically, an example of four sectors is demonstrated, in wich for some values of the parameters, the model is predictable, and for others it is chaotic.

Analyse d'un modèle dynamique intersectoriel

On analyse un système dynamique de temps discret que modèle une économie sectorielle de prix et de qualités. On montre numériquement un example à quatre secteurs dans lequel pour certaines valeurs des paramètres le modèle est prévisible et pour d'autre le modèle est chaotique.

• Grupo de Economía Matemática, Instituto de Investigaciones Económicas (IIEc.), UNAM. El autor agradece a J. Ibarra por sugerir la investigación y por dedicar tiempo a la explicación del modelo; a M. Sánchez por la captura del texto. A los proyectos "Programación y Simulación de un Modelo Intersectorial de Insumo-Producto Dinámico para la Economía Mexicana", DGSCA SC-004896, "Programación y Simulación de un modelo Intersectorial de Insumo–Producto Dinámico para la Economía Mexicana para Evaluar Distintos Escenarios de Política Económica", PAPIIT IN-502096, ambos de la UNAM.

* Traducción al inglés: María Elena Valdés Dávila, Profesora del Centro de Lenguas Extranjeras, UNAM. Traducción al francés: Nicole Trocherie, Profesora del Centro de Lenguas Extranjeras de la UNAM.

Problemas del Desarrollo, Vol. 29, núm. 113
México, IIEc.-UNAM, abril–junio 1998.

Introducción

El propósito de este trabajo es analizar el núcleo principal del modelo en condiciones de competencia perfecta y no suponiendo que existan monopolios.

En este artículo se hace un estudio de un modelo dinámico de tiempos discretos propuesto en Ibarra, J. 1995. El modelo gobierna una economía sectorial de insumo-producto no lineal para precios y cantidades. Dada la no linealidad en el sistema dinámico asociado se pueden encontrar comportamientos complejos (ver Arrowsmith, D.K. y Place, C.P, 1991; Ford, J. 1986), caracterizados principalmente por la llamada sensibilidad respecto a condiciones iniciales. Se supone que la economía en estudio está dividida en asalariados, capitalistas y terratenientes. En el modelo, los factores que determinan los precios y la tasa promedio de ganancia son la demanda y el ingreso por el conjunto de asalariados; todas las otras variables, como principalmente las cantidades, ingreso por asalariados, ganancia por conjunto de capitalistas y tasa de explotación se pueden calcular a partir de los precios dados, al considerar la demanda de asalariados y la demanda respectiva (por capitalistas, rentistas, asalariados).

Es típico encontrar sistemas dinámicos de tiempo discreto en varias disciplinas, por ejemplo en economía (Flaschel, P. y Franke, R. Semmler, W. [1995]), (Gabisch, G. y Walter, H. [1987]), en física (Baum, E. B. [1988]), (Lorenz, E.N. [1963]), en biología (Guevara, M. R. y Glass, L. [1982]), (Terman, D. [1991]), y en Teoría de números (Guzmán, J.R. y Carrillo, H. [1994]), (Percival, I. y Vivaldi, F. [1987]).

El modelo clásico

En 1936, V. I. Leontieff propuso un modelo sectorial de insumo producto de precios y cantidades para modelar una economía nacional. Tal modelo en forma simplificada es el siguiente.

Supongamos una economía clasificada en n sectores donde cada sector i, produce el bien i en la cantidad x_i. Además el parámetro m_{ij} es la demanda interna del sector j sobre el sector

i. La demanda externa sobre el sector i la denotaremos por e_i. Si definimos

$$M = (m_{ij}),$$
$$X^t = (x_1,\dots,x_n)^t,$$
$$E^t = (e_1,\dots,e_n)^t.$$

El modelo de Leontieff de cantidades está dado por la relación:

$$MX + E = X. \qquad (1)$$

En la referencia (Leontieff, W. 1966), se pueden encontrar ejemplos originales.

Dinamización I

La idea del modelo de Leontieff se ha ido afinando y ha dado lugar a generalizaciones, con el fin de poder aplicarla a situaciones más realistas y observables de una economía nacional clasificada en sectores. Así, por ejemplo, el modelo dado en la relación (1) se ha dinamizado; es decir, sus variables relevantes se han hecho depender de una variable temporal. Leontieff (1953) propone la dinamización siguiente:

Sean:

$$M(t) = (m_{ij}(t)),$$
$$K(t) = (k_{ij}(t)),$$
$$X^t(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^t,$$
$$E^t(t) = (e_1(t),\dots,e_n(t))^t.$$

En términos económicos la demanda interna, dada por los coeficientes m_{ij} depende del tiempo, así como el vector de producción $X(t)$, y el vector de demanda final $E(t)$. Además se ha agregado una nueva variable; la matriz de capital K que también depende del tiempo.

El modelo de cantidades esta dado por la relación siguiente:

$$X(t) = M(t)X(t) + E(t) + K(t)(X(t+1) - X(t)). \qquad (2)$$

Este modelo ha recibido críticas vigorosas de Pasinetti (1981). Por ejemplo, Pasinetti considera el modelo

$$X(t) = M(t)\,X(t) + E(t) + K(t)\delta + J$$

donde $\boldsymbol{J = g\,(M(t) + K(t)\;\;X(t)}$, $\boldsymbol{g}$ es la tasa de crecimiento hacia adelante de la economía $\boldsymbol{M(t), K(t), X(t)}$ son definidas como antes. $\boldsymbol{J}$ se puede interpretar como un vector de inversiones brutas tanto en bienes de capital fijo como circulantes. En este modelo se supone que la tasa de crecimiento $\boldsymbol{g}$ de todos los sectores es igual. En el modelo de Pasinetti se supone que todos los periodos de producción en cada sector son iguales y son de un año. Ver Ibarra, J. (1998) para una discusión más general.

En la siguiente sección se comenta un modelo más general que el que propone L. Pasinetti.

Dinamización II

Ibarra, J. (1995) propone otro modelo dinámico de insumo-producto más afinado que el modelo de la dinamización I y que está definido por las siguientes componentes dependientes de una variable de tipo temporal $\boldsymbol{t}$.

Una matriz de insumo producto dinámica;

$$M(t) = (m_{ij}(t)) \quad 0 \leq m_{ij}(t) \; < 1.$$

$m_{ij}(t)$ representa las unidades físicas del bien $\boldsymbol{i}$ necesario para producir una unidad del bien $\boldsymbol{j}$.

Una matriz de capital;

$$K(t) = (k_{ij}(t)) \quad 0 \leq k_{ij}(t).\ 1$$

K(t) representa una matriz de stocks y $\boldsymbol{k_{ij}(t)}$ representa las unidades físicas del bien de capital $\boldsymbol{i}$ necesaria para producir una unidad en el sector $\boldsymbol{j}$.

Una matriz de coeficientes de reposición;

$$R(t) = (r_{ij}(t)) \quad 0 \leq \; r_{ij}(t) < 1\ .$$

$\boldsymbol{r_{ij}(t)}$ es la tasa de reposición de bienes de capital fijo producidos por el sector $\boldsymbol{i}$ que se usan en la producción del sector $\boldsymbol{j}$.

Una matriz de periodos de producción;

$$\hat{T}(t) = \begin{vmatrix} \tau_1(t) & & & & \\ & \tau_2(t) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \tau_n(t) \end{vmatrix}$$

τ_i representa el número de años necesarios para producir una unidad en el sector $\boldsymbol{i}$, y un vector asociado de periodos de producción

$$T = \begin{vmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_n(t) \end{vmatrix}$$

Para facilitar el cálculo se define la siguiente operación de matrices. Sean $\boldsymbol{A = (a_{ij}), B=(b_{ij})}$ de $\boldsymbol{n \times n}$ definimos la operación $\oplus$ como:

$$A \oplus B = (a_{ij}b_{ij}).$$

Se define el vector de demanda no lineal (en precios) $\boldsymbol{y^a(t)}$ implícitamente por cada asalariado de la manera siguiente.

Sea $\boldsymbol{Y}$ el ingreso por cada asalariado (aquí lo normalizaremos a $\boldsymbol{Y = 1}$)

$$\hat{p}\,(t) \;=\; \begin{vmatrix} p_1(t) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & p_n(t) \end{vmatrix},$$

$$ya(t) = \begin{vmatrix} y_1^a(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^a(t) \end{vmatrix},$$

$$y^*(t) = \begin{vmatrix} y_1^*(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^*(t) \end{vmatrix}, \text{ consumo necesario}$$

$$ba(t) = \begin{vmatrix} b_1^a(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^a(t) \end{vmatrix}$$

es el vector de propensión a consumir y debe satisfacer que $b_1^a(t) + \ldots + b_n^a(t) = 1$

Entonces la ecuación (Stone, R., 1954) es:

$$\hat{p}(t)y^a(t) = \hat{p}(t)\,y^*(t) + b^a(t)\,(Y - p(t)\,y^*(t))$$

Despejando $y^a(t)$ de la relación anterior se tiene que:

$$y^a(t) = \begin{vmatrix} y_1^*(t) + \dfrac{b_1^a(t)(Y - \sum_{k=1}^{n} y_k^*(t)p_k(t))}{p_1(t)} \\ y_2^*(t) + \dfrac{b_2^a(t)(Y - \sum_{k=1}^{n} y_k^*(t)p_k(t))}{p_2(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^*(t) + \dfrac{b_2^a(t)(Y - \sum_{k=1}^{n} y_k^*(t)p_k(t))}{p_n(t)} \end{vmatrix},$$

Obsérvese que este vector de demanda definido en los precios, es decir:

$$(p_1(t),\ldots,p_n(t))\ \ y^a(t)(p_1(t),\ldots,p_n(t))$$

es no lineal.

$\beta^a(t)$ es el número de dependientes por cada ocupado en las familias de los asalariados.

Un vector de índices de precios;

$$p^t(t) = (p_1(t),\ldots,p_n(t))^t.$$

Un vector de coeficientes de trabajo;

$$L^t(t) = (l_1(t),\ldots,l_n(t))^t.$$

$l_i(t)$ representa la hora-hombre necesaria para producir una unidad en el sector i.

Una tasa promedio de ganancia de la economía;

$$\overline{\varphi}(t).$$

Una matriz de desviaciones de tasas respecto de $\overline{\varphi}$;

$$\hat{\varphi}_m(t) = \begin{vmatrix} \varphi_m^1(t) & & & & \\ & \varphi_m^2(t) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \varphi_m^n(t) \end{vmatrix}$$

En condiciones de competencia perfecta cada $\varphi_m^i(t) = 1$. En otras condiciones estos coeficientes miden la presencia de monopolios en el sector respectivo i.

Una matriz de tasas de ganancia sectoriales hacia adelante;

$$\hat{G} = \begin{vmatrix} g_1 & & & & \\ & g_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & g_n \end{vmatrix}$$

Además definiremos la matriz:

$$C(t) = M(t)\,\hat{T}(t) + K(t).$$

Si se impone la condición de precios=costos y se considerar los siguientes costos:

$\hat{\beta} = \overline{\varphi}(t)\hat{\phi}_m(t) - \hat{G}(t)$	*una matriz diagonal de sobreganancia de los sectores.*
$p^t(t)\,M(t)$	*costos de los insumos corrientes.*
$p^t(t)\,(K(t) \oplus R(t))$	*costos de la reposición de capital.*
$p^t(t)\,M(t)\,\hat{T}(t)\,\hat{G}(t)$	*costos de los insumos en un crecimiento proyectado a las tasas contenidas en $\hat{G}$.*
$p^t(t)\,K(t)\,\hat{G}(t)$	*costos del capital en el crecimiento.*
$p^t(t)\,M(t)\,\hat{T}(t)\hat{\beta}$	*costo de insumos al tener una sobreganan*c
$p^t(t)\,K(t)\,\hat{\beta}$	*costo del capital al tener una sobreganan*ci
$L(t)$	*costos del trabajo.*
$L(t)\,\hat{T}(t)\hat{\beta}$	*costos que produce la inversión en trabajo.*

Con los anteriores elementos, el modelo de precios es:

$$p^t(t) = p^t(t)\,(M(t) + K(t) \oplus R(t)) + \overline{\varphi}\,p^t(t)\,C(t)\,\hat{\phi}_m + L^t(t) + L^t(t)\,\hat{T}(t)\,(\overline{\varphi}(t)\,\hat{\phi}_m(t) - \hat{G}(t)) \qquad (3)$$

Otros elementos del modelo son los siguientes:
Se define la matriz:

$$H(t) = (I - M(t) - K(t) \oplus R(t))^{-1}.$$

Se define además la ecuación:

$$\lambda_m^t\,(t) = L^t(t)\,H(t).$$

De los llamados valores estáticos de Marx que se interpretan como: "los requisitos directos e indirectos de trabajo, por unidad de demandas finales de bienes de consumo y de inversión, sin considerar el trabajo necesario para la reposición y crecimiento de los bienes de inversión".[1]

Si se supone que los asalariados no ahorran se debe satisfacer que:

$$p(t)\,y^a(t)\,\beta^a(t) = 1 = salario$$

$\boldsymbol{y^a(t)}$ es la función de demanda que surge a partir de la ecuación de R. Stone.

Si de la relación (3) se despeja $\boldsymbol{p(t)}$ y se sustituye en la relación anterior se tiene entonces que se liga $\boldsymbol{p(t)}$ con $\boldsymbol{\overline{\varphi}(t)}$ y de la cual se puede despejar $\boldsymbol{\overline{\varphi}(t)}$, obteniéndose de esta manera:

$$\overline{\varphi}(t) = \frac{1 - \lambda_m^t(t)\beta^a(t) + L^t(t)\hat{G}(t)H(t)y^a(t)\beta^a(t)}{(p^t(t)C(t) + L^t(t)\hat{T})\hat{\phi}_m(t)H(t)y^a(t)\beta^a(t)} \qquad (4)$$

El modelo de precios a ***n*** *sectores*

Para determinar los precios (índices) y la tasa promedio de ganancia en cada sector en que esté dividida la economía se deben acoplar las relaciones (3) y (4); es decir, que se debe resolver el sistema no lineal en precios $\boldsymbol{p(t)}$ y la tasa φ siguiente.

$$(5)\quad \left|\begin{array}{ll} p^t = p^t(M + K \oplus R) + \overline{\varphi}\,p^t\,C\,\hat{\phi}_m + L^t + L^t\,\hat{T}\,(\overline{\varphi}\,\hat{\phi}_m - \hat{G}) & (5.1) \\ \overline{\varphi} = \dfrac{1 - \lambda_m^t\,y^a\beta^a + L^t\,\hat{G}\,Hy^a\,\beta^a}{(p^t\,C + L^t\,\hat{T})\,\hat{\phi}_m\,Hy^a\,\beta^a)} & (5.2) \end{array}\right.$$

En el modelo dinámico este sistema de ecuaciones determina todas las otras variables del modelo, así nos concentraremos en él. En Ibarra, J. (1995), se propone una idea para resolver el sistema (5); esta idea se explica a continuación.

1 Ibarra, J., 1995.

Se trata de resolver iterativamente el sistema de ecuaciones (5) para cada tiempo t. Dicho de otra manera la idea es tomar un precio inicial en la relación (5.2) y calcular una tasa inicial $\overline{\varphi}$ y sustituir ésta en (5.1), para obtener otro valor en los precios. Este proceso se repite hasta converger a una tasa $\overline{\varphi}_*$ y a un sistema de precios p_*. En otras palabras como p es una función de $\overline{\varphi}$; $p = p(\overline{\varphi})$. $\overline{\varphi}$ es una función de p, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(p)$. Entonces se puede tomar un vector de precios inicial p_0 e ir calculando sucesivamente $p_1 = p(\overline{\varphi}(p_0))$, $p_2 = p(\overline{\varphi}\ (p_1))$, $p_3 = p(\overline{\varphi}(p_2))$,... etcétera.

En lo que sigue I es la matriz identidad. La relación (5.1) se puede escribir en la forma:

$$p^t = (L^t + L^t\,\hat{T}(\overline{\varphi}\,\hat{\phi}_m - \hat{G}))\,(I - M - K \oplus R - \overline{\varphi} C\,\hat{\phi}_m)^{-1}$$

El objetivo de los siguientes párrafos es simplificar la relación (5.1).

Con las notaciones anteriores el término $\overline{\varphi}C(t)\,\hat{\phi}_m$ se transforma en:

$$\overline{\varphi} C\,\hat{\phi}_m = \overline{\varphi}\,((m_{ij}))\ \hat{T} + (k_{ij}))\,\hat{\phi}_m$$

esto es:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_i & si \quad i = j\,, \\ 1 & si \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

$$\varphi_m^{ij} = \begin{cases} \varphi_m^i & si \quad i = j\,, \\ 1 & si \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Es decir que:

$$\overline{\varphi} C\,\hat{\phi}_m = \overline{\varphi}\,(m_{ij}\,\tau_{ij})\,\varphi_m^{ij}\quad ,$$

y tenemos para $i = 1,\ldots,n$:

$$q_i = l_i + \tau_i\, l_i\, g_i\, \varphi_m^i\, \overline{\varphi}\,.$$

Si definimos:

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{vmatrix} ,$$

donde:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}^{-1t} = (I - M - K \oplus R - \overline{\varphi} C\,\hat{\phi}_m)^{-1t}\,.$$

Entonces

$$u_{ij} = \delta_{ij} - m_{ij} - k_{ij}\, r_{ij} - \overline{\varphi}\, \varphi_m^{ij}\ (\tau_{ij}\, m_{ij} + k_{ij})\,,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{matrix} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{matrix}$$

Se consideran ahora las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}^* &= \delta_{ij} - m_{ij} - k_{ij}\, r_{ij}\ , \\ \mu_{ij}^* &= \varphi_m^{ij}\ (\tau_{ij}\, m_{ij} + k_{ij})\ , \\ \nu_i^* &= l_i\ , \\ \alpha_i^* &= \tau_i\, l_i\, g_i\, \varphi_m^i\ . \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \zeta_{ij} + \mu_{ij}^*\ \ \varphi\ , \\ q_i &= \nu_i^* + \alpha_i^*\ \ \varphi\ . \end{aligned}$$

* * *

De esta forma:

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta^*_{11} + \mu^*_{11}\overline{\varphi}, & \dots & \zeta^*_{1n} + \mu^*_{1n}\overline{\varphi}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta^*_{n1} + \mu_{n1}\overline{\varphi}, & \dots & \zeta^*_{nn} + \mu_{nn}\overline{\varphi}, \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \nu^*_1 + \alpha^*_1\overline{\varphi} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu^*_n + \alpha^*_n\overline{\varphi} \end{vmatrix}$$

De la matriz:

$$(\zeta^*_{ij} + \mu^*_{ij}\overline{\varphi})^t = (\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\varphi}).$$

se tiene:

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{vmatrix} = (\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\varphi})^{-1} \begin{vmatrix} \nu^*_1 + \alpha^*_1\varphi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu^*_n + \alpha^*_n\varphi \end{vmatrix}.$$

Salvo cambios de constantes:
Al calcular $(\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\varphi})^{-1}$, se obtiene:

$$(\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\varphi})^{-1} = \frac{c^{ij}_0 + c^{ij}_1\overline{\varphi} + c^{ij}_2\overline{\varphi}^2 + \dots + c^{ij}_{n-1}\overline{\varphi}^{n-1}}{b_0 + b_1\overline{\varphi} + b_2\overline{\varphi}^2 + \dots + b_n\overline{\varphi}^n}$$

Entonces nuevamente, para ***i=1,...,n***, se tiene que:

$$p_i = \frac{a^i_0 + a^i_1\overline{\varphi} + a^i_2\overline{\varphi}^2 + \dots + a^i_n\overline{\varphi}^n}{b_0 + b_1\overline{\varphi} + b_2\overline{\varphi}^2 + \dots + b_n\overline{\varphi}^n}$$

De esta manera la relación para $\overline{\varphi}$, *y* p_i es:

* * *

(6)

$$p_i = \frac{a^i_0 + a^i_1\overline{\varphi} + a^i_2\overline{\varphi}^2 + \dots + a^i_n\overline{\varphi}^n}{b_0 + b_1\overline{\varphi} + b_2\overline{\varphi}^2 + \dots + b_n\overline{\varphi}^n} \qquad (6.1)$$

$$\varphi = \frac{\xi + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k p_k}{\eta + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k} \qquad (6.2)$$

En estas relaciones se puede observar la no linealidad de los precios en función de la tasa promedio de ganancia y la no linealidad de la tasa promedio de ganancia con respecto a los precios. Esta no linealidad en estas relaciones surge a raíz de que la función de demanda de asalariados definida por las ecuaciones de R. Stone es no lineal en los precios.

para $i = 1, 2, \dots, n.$

Ahora, si en el conjunto de relaciones (6) se sustituye el valor para $\overline{\varphi}$; las relaciones (6) quedan todas en función del sistema de precios $(p_1, \dots, p_n)$.

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$p_l = \frac{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n \in (1,\dots,n)} \gamma^{l\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}}{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n \in (1,\dots,n)} \lambda^{l\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}}$$

$l = 1, 2, \dots, n.$ (7)

Los coeficientes $\gamma^{l\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}$, $\lambda^{l\,\nu_1\nu_2\dots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}$, están en función de todos los otros parámetros del modelo.

El símbolo $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,n\}$ significa que:

$\sigma_1 \in \{1, \ldots, n\}$ ó
$\sigma_2 \in \{1, \ldots, n\}$ ó
.
.
.
$\sigma_n \in \{1, \ldots, n\}$ ó
$\nu_1 \in \{1, \ldots, n\}$ ó
$\nu_2 \in \{1, \ldots, n\}$ ó
.
.
.
$\nu_n \in \{1, \ldots, n\}$

Por ejemplo, si se tiene $\alpha, \beta, \gamma \in \{i, j, k\}$ y se elige a $\alpha = i$, $\beta = k$ el coeficiente correspondiente en la sumatoria

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma \in (i,j,k)} \xi_\alpha \beta_\gamma$$

será ξ_{ik}, si no se elige ningún valor para γ se deja un espacio en blanco.

Ahora, para resolver el sistema de ecuaciones (5) se elige un sistema dinámico no lineal de tiempos discretos que simula el proceso de cálculo de precios (proceso iterativo) definido por las siguientes ecuaciones:

$$(8)\quad \left|\begin{array}{lr} p^t(k+1) = p^t(k+1)(M + k \oplus R) + \overline{\varphi}(k) p^t(k+1) C\, \hat{\phi}_m + L^t + L^t\, \hat{T}(\overline{\varphi}\hat{\phi}_m - \hat{G}) & (8.1) \\ \overline{\varphi}(k) = \dfrac{1 - \lambda^t_m\, y^a \beta_a + L^t\, \hat{G}\, H\, y^a \beta_a}{(p^t(k) C + L^t\, \hat{T})\, \phi_m\, H\, y^a \beta_a} & (8.2) \end{array}\right.$$

En donde el símbolo $\boldsymbol{p^t(k)}$ significa la iteración ***k*–*ésima*** en el tiempo ***t*** del vector $\boldsymbol{p^t}$. A la luz de la simplificación (8) el sistema dinámico queda definido como:

$$pl\,(k+1) = \frac{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in (1,\ldots,n)} \gamma^{l_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}(k)p_{\sigma_2}(k)\ldots p_{\sigma_n}(k)}{p_{\nu_1}(k)p_{\nu_2}(k)\ldots p_{\nu_n}(k)}}{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in (1,\ldots,n)} \lambda^{l_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}(k)p_{\sigma_2}(k)\ldots p_{\sigma_n}(k)}{p_{\nu_1}(k)p_{\nu_2}(k)\ldots p_{\nu_n}(k)}}$$

$$l = 1, 2, \ldots, n;\ k \in \mathrm{N}; \tag{9}$$

Si las constantes $\gamma^{l_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$, $\lambda^{l_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$, fueran independientes de las otras constantes del modelo se podrían variar y así obtener por ejemplo:

a) Todos los sistemas lineales de cualquier dimensión
b) Toda una clase de sistemas caóticos, por ejemplo dada alguna ***l***, la iteración caótica:

$$p_l\,(k+1) = 4p_l\,(k)\,(1 - p_l\,(k))$$

*El modelo de cantidades a **n** sectores*

Si identificamos cada término siguiente con su significado económico:

$M(t)\,X(t)$	*demanda de insumos corrientes.*
$(K(t) \oplus R(t))\,X(t)$	*demanda de reposición de bienes de capital fijo.*
$M(t)\,\hat{T}(t)\,\hat{G}(t)\,X(t)$	*demanda de insumos ante crecimiento.*
$K(t)\,\hat{G}(t)\,X(t)$	*demanda de bienes de capital fijo ante crecimiento.*
Y	*es el vector de demanda final.*

Al aplicar la condición de oferta=demanda, el modelo que se propone para determinar el vector de cantidades:

$$X(t)) = \left|\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{array}\right|$$

es el siguiente:

$$X(t) = M(t)\,X(t) + K(t) \oplus R(t)\,X(t) + K(t)\,\hat{G}(t)\,X(t) + M(t)\,\hat{T}\,\hat{G}(t)\,X(t) + Y(t). \quad (10)$$

El vector de demanda final $\boldsymbol{Y(t)}$. queda modelado por la demanda definida por las ecuaciones de gasto de R. Stone.

Comparando con el modelo de L. Pasinetti se pueden ver elementos nuevos; la idea de reposición de capital fijo, tasas de crecimiento hacia adelante (diferentes en cada sector) y periodos de producción diferentes en cada sector.

Definiendo

$$\mathcal{A}(t) = M(t) + K(t) \oplus R(t) + K(t)\,\hat{G}(t) + M(t)\,\hat{T}\,\hat{G}(t),$$

El modelo (10) se resuelve, obteniéndose para cantidades la relación:

$$X(t) = (I - \mathcal{A}(t))^{-1}\; Y(t). \quad (11)$$

Dado que la demanda $\boldsymbol{Y(t)}$ depende del vector de precios $\boldsymbol{p}$ y puede ser la demanda por el conjunto de asalariados o por el conjunto de capitalistas, el vector $\boldsymbol{Y(t)}$ dependerá según el caso. El vector de precios $\boldsymbol{p}$ es el de equilibrio; es decir, el punto de convergencia al iterar el sistema (9). Las cantidades en cada periodo de tiempo quedan definidas (salvo cambios de constantes) por:

$$x_l = \frac{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n \in (1,\dots,n)} \alpha^{l_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n}}}{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n \in (1,\dots,n)} \beta^{l_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n}}}$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

Es interesante observar la dependencia de las cantidades x_l de cada sector con respecto a los precios p_l.

Funciones de ganancia y tasa de explotación

Al modelo se le pueden asociar algunas funciones macroeconómicas de la siguiente forma.

La masa de ganancia en todos los casos se define a la manera clásica:

Ganancia = Ingresos – Costos.

Por ejemplo, en cada periodo de tiempo $\boldsymbol{t}$, la masa de ganancia es:

$$G_a(t) = p_*\,X(t) - p_*\,\mathcal{A}(t)\,X(t) - L^t(t)\,X(t);$$

en esta función $\boldsymbol{p_*}$ es el vector de precios de equilibrio, los costos de los insumos es la cantidad $\boldsymbol{p_*}\,\mathcal{A}(t)X(t)$ y los costos del trabajo es $\boldsymbol{L^t(t)X(t)}$.

La suma de ingreso por los asalariados se obtiene haciendo $\boldsymbol{Y(t) = Ey^a}$, donde:

$$E = \frac{z^c\, y^c\, \beta^c}{1 - z^a\, y^a\, \beta^a}\, P^c .$$

y además $\boldsymbol{z^a = z^c = L^t(t)\;(I - \mathcal{A}(t))^{-1}}$.

Similarmente haciendo $\boldsymbol{Y(t) = P^c y^c}$, se puede obtener la ganancia de los capitalistas.

La tasa de explotación de los asalariados se define por la ecuación:

$$\sigma \;=\; \frac{z^c\, y^c\, \beta^c\, P^c}{z^a\, y^a\, \beta^a}.$$

Representa el cociente entre el consumo de capitalistas y consumo de asalariados.

Ejemplo

Esta sección es un análisis numérico de un ejemplo ([1] Ibarra, J. 1996).

El objetivo de los siguientes cálculos es simular una economía nacional en condiciones de competencia perfecta. Esto significa que la matriz de desviaciones $\hat{\phi}_m$, es la matriz identidad. Por consiguiente se incluye la hipótesis de que en cada sector de la economía no hay monopolios. Los sectores en consideración son:

1) maquinaria y equipo (bienes de capital)
2) insumos (productos agrícolas)
3) consumos (productos agrícolas)
4) durables

El parámetro que se variará (parámetro de bifurcación) es la tasa de crecimiento hacia adelante g. Realistamente esta tasa no puede exceder de 20/100.

En las simulaciones que siguen se observan precios y tasa promedio de ganancia fija de (6.351018021, 1.358261504, 4.926206633, 5.975165560) y $\overline{\varphi} = 0.50$ respectivamente, para un valor de $g=0.05$ en adelante.

Al cambiar el primer periodo de producción de ***0.5*** a ***1*** y fijar la tasa de crecimiento hacia adelante $g=0.03$, se tiene que el modelo es impredictible.

Datos iniciales

La notación que sigue es congruente con la de los párrafos anteriores, por lo que se omitirá en casi todos los casos el concepto económico.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ .8 & .2 & .9 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$K = \begin{vmatrix} 1.5 & 1.25 & 1 & 1.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} .0315 & .0315 & .0315 & .0315 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 \end{vmatrix}$$

$$y^a = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ .35 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - .35p_3 - .15p_4}{p_3} \\ \\ .15 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - .35p_3 - .15p_4}{p_4} \end{vmatrix}$$

Las variables principales en función de los precios

En esta sección se dan algunas fórmulas de las variables más importantes usadas en el modelo (precios y tasa promedio de ganancia) .

La tasa promedio de ganancia de la economía está dada por:

$$\overline{\varphi}\,(g, p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1 - L(I - M - K \oplus R)^{-1} y + L\,\hat{G}(I - M - K \oplus R)^{-1} y}{(p(M\,T + K) + L\,T)\,(I - M - K \oplus R)^{-1} y} =$$

$$(.82801 p_3\, p_4 - .25332 p_4 + 3.7998 \text{ X } 10^{-2}\, p_4^2 - .55555\, p_3 + .19444 p_3^2 + .17199 g\, p_4\, p_3 + .25332 g\, p_4 - 3.7998 \text{ X } 10^{-2}\, g p_4^2 + .55555 g\, p_3 - .19444 g p_3^2)\,/(.34743 p_1\, p_3\, p_4 - .678 p_1\, p_4 + .1017 p_1 p_4^2 - .12694 p_2\, p_3\, p_4 - .26031 p_2\, p_4 + 3.9047 \text{ X } 10^{-2} p_2 p_4^2 - 9.0252 \text{ X } 10^{-2} p_3 p_4 - .12816 p_4 + 1.9223 \text{ X } 10^{-2} p_4^2 - .73422 p_1\, p_3 + .25698 p_1 p_3^2 - .23888 p_2\, p_3 + 8.3607 \text{ X } 10^{-2} p_2\, p_3^2 - .30266\, p_3 + .10593 p_3^2\,) \tag{12}$$

* * *

En este caso se puede ver la dependencia de la variable $\overline{\varphi}$ con respecto a los precios.

Similarmente haciendo cálculos con las matrices involucradas en la ecuación para p se tiene que:

$$pt(t) = (Lt(t) + Lt(t)\,\hat{T}\,(\overline{\varphi}\,\hat{\phi}_m - G(t)))\,(I - M(t) - K(t) \oplus R(t) - \overline{\varphi}\,C(t)\,\hat{\phi}_m)^{-1}$$
$$= (\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3\, \sigma_4) \qquad (5.2)$$

$$\sigma_1 = 250.0\,\frac{12.0 + 8.0\overline{\varphi} + \overline{\varphi}^2 - 8.0g - 1.0\,g\,\overline{\varphi}}{7559.0 - 15937.0\overline{\varphi} + 2000.0\overline{\varphi}^2}$$

$$\sigma_2 = -.15625\,\frac{-7496.0 + 8441.0\,\overline{\varphi} + 14000.0\overline{\varphi}^2 + 7559.0g - 14000.0g\overline{\varphi}}{7559.0 - 15937.0\overline{\varphi} + 2000.0\overline{\varphi}^2}$$

$$\sigma_3 = 3.125\text{x}10^{-4}\,\frac{5.1997 \times 10^{6} - 9.4239 \times 10^{6}\overline{\varphi} + 1.0491\,10^{6}\overline{\varphi}^2 + 1.62 \times 10^{5}\overline{\varphi}^3 + 8.6173 \times 10^{5} g + 1.509 \times 10^{5} g\overline{\varphi} - 1.62 \times 10^{5} g\overline{\varphi}^2}{7559.0 - 15937.0\overline{\varphi} + 2000.0\overline{\varphi}^2}$$

$$\sigma_4 = .00625\,\frac{1.3438 \times 10^{6} - 1.3037 \times 10^{6}\overline{\varphi} - 7.2182 \times 10^{5}\overline{\varphi}^2 + 1.33 \times 10^{5}\overline{\varphi}^3 - 7.3208 \times 10^{5} g + 9.8182\,10^{5} g\overline{\varphi} - 1.33 \times 10^{5} g\overline{\varphi}^2}{7559.0 - 15937.0\overline{\varphi} + 2000.0\overline{\varphi}^2}$$

Transponiendo el vector de precios anterior se tiene que:

$$p(g,\overline{\varphi}) = \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{vmatrix} \qquad (5.2)$$

Otra explicación del método iterativo para el cálculo de precios es la siguiente. Para determinar los precios de equilibrio y la tasa promedio de ganancia de equilibrio asociada, se tienen que resolver las ecuaciones (6.1) y (6.2). Observe que la relación (6.1) se puede sustituir en la relación (6.2) y de esta manera quedan solamente como variables los precios. Dicho de otra manera, si ***id*** es la función identidad en $\mathbb{R}^4$, definida por $\boldsymbol{id(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)}$ entonces observemos que el siguiente diagrama de funciones conmuta:

* * *

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ id\downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{' \cdot \varphi} & \mathbb{R}^{\ngeq} \end{array}$$

$$\Phi(g, p_1, p_2, p_3, p_4) = (p \circ \overline{\varphi})\,(g, p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{vmatrix} \Phi_1(g, p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \Phi_2(g, p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \Phi_3(g, p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \Phi_4(g, p_1, p_2, p_3, p_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{vmatrix}$$

Para determinar los precios de equilibrio se usa un sistema dinámico definido por las ecuaciones:

$$(p_1(\kappa+1), p_2(\kappa+1), p_3(\kappa+1), p_4(\kappa+1)) = \Phi(g, p_1(\kappa), p_2(\kappa), p_3(\kappa), p_4(\kappa))$$

Por otra parte, la tasa de equilibrio en cada iteración κ, que podemos llamar $\overline{\varphi}(\kappa)$ y que depende del valor de $\boldsymbol{g}$, se puede determinar por medio de la fórmula:

$$\overline{\varphi}(\kappa) = \overline{\varphi}(g, p_1(\kappa), p_2(\kappa), p_3(\kappa), p_4(\kappa))$$

Simulaciones numéricas

Variando la tasa de crecimiento $\boldsymbol{g}$ en su rango útil: $0 \leq g \leq 0.15$, y empezando desde un índice de precios (1,1,1,1) se puede obtener una sucesión de gráficas que serán llamadas *Gráfico(g)*= $\{(\kappa, \overline{\varphi}(\kappa)) : \kappa = 1,2,3,\ldots\}$, obsérvese que en todos los casos se alcanza un valor fijo de la tasa promedio de ganancia. A partir de un valor muy cercano a 0 se alcanza una $\overline{\varphi} = 0.5$; un **atractor** periódico de periodo uno.

A continuación se mostrará la tabla de simulación con los valores para $\boldsymbol{g}$ y para el valor de convergencia de $\overline{\varphi}$. En todos los casos se usaron 50 iteraciones.

En el rango útil del parámetro $\boldsymbol{g}$ no se observa el fenómeno de sensibilidad respecto a condiciones iniciales, por lo cual el modelo es predictible para estos casos.

* * *

g	$\overline{\varphi}$
0	0.10
0.015	0.5
0.03	0.5
0.045	0.5
0.06	0.5
0.08	0.5
0.1	0.5
0.15	0.5

FIGURA 1

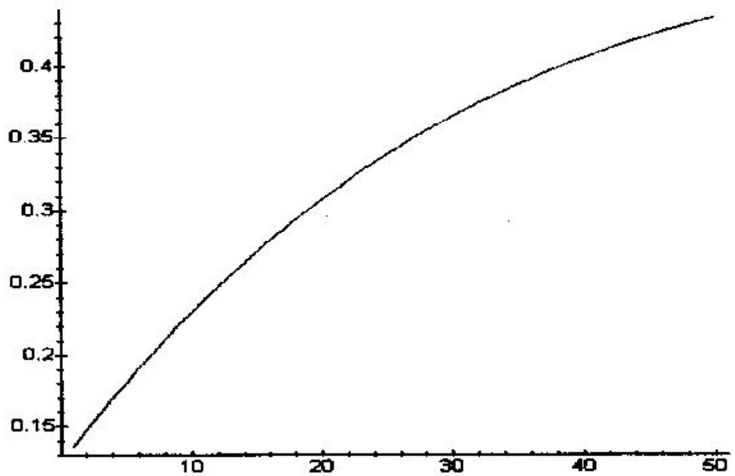


GRAFICO (0.045) en este caso converge a 0.5

* * *

FIGURA 2

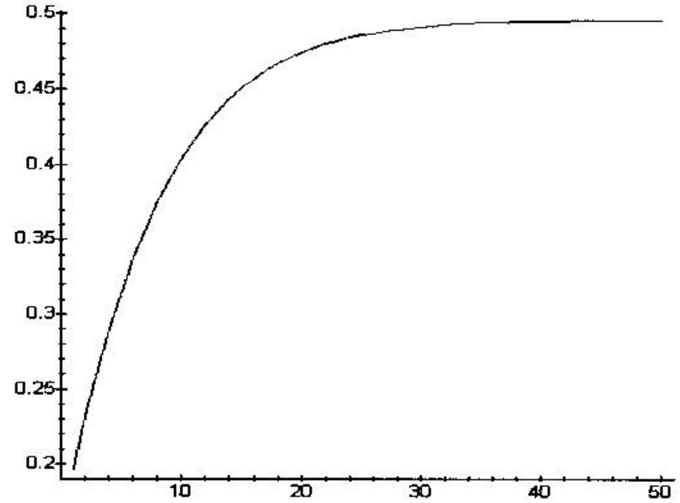


GRAFICO (0.15)

De forma numérica también se puede visualizar cada Gráfico (***g***) y su valor de precios de equilibrio asociado.

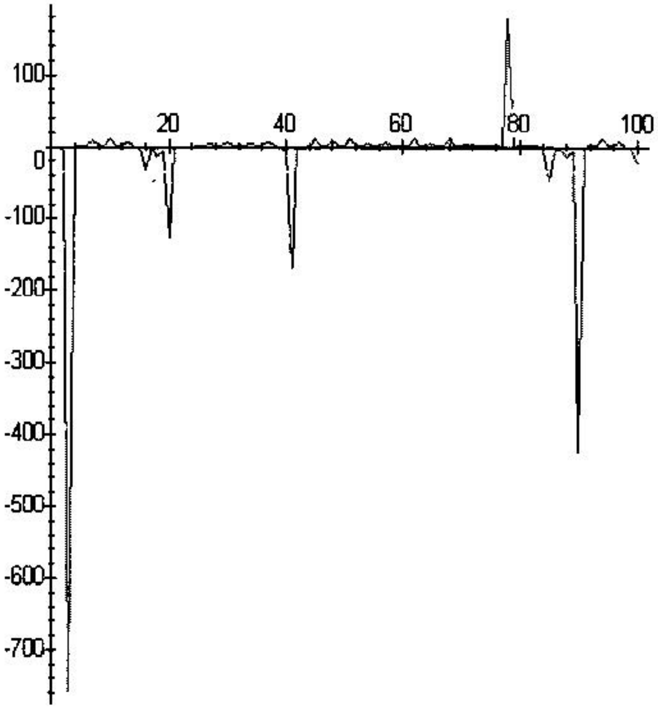
Si en todo lo anterior se cambia la matriz de periodos de producción (sólo cambiamos el primer periodo de producción de 0.5 a 1):

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 \end{vmatrix}$$

y se fija la tasa de crecimiento en g = 0.03, el modelo se torna impredictible. Obsérvese la siguiente gráfica e implícitamente el fenómeno de sensibilidad respecto a condiciones iniciales. La gráfica muestra la relación ($\boldsymbol{n}$, $\overline{\varphi}$ ($\boldsymbol{n}$)) donde $\boldsymbol{n}$ es el número de iteraciones y $\overline{\varphi}$ es la tasa promedio de ganancia en cada iteración. Observe la no convergencia.

* * *

FIGURA 3

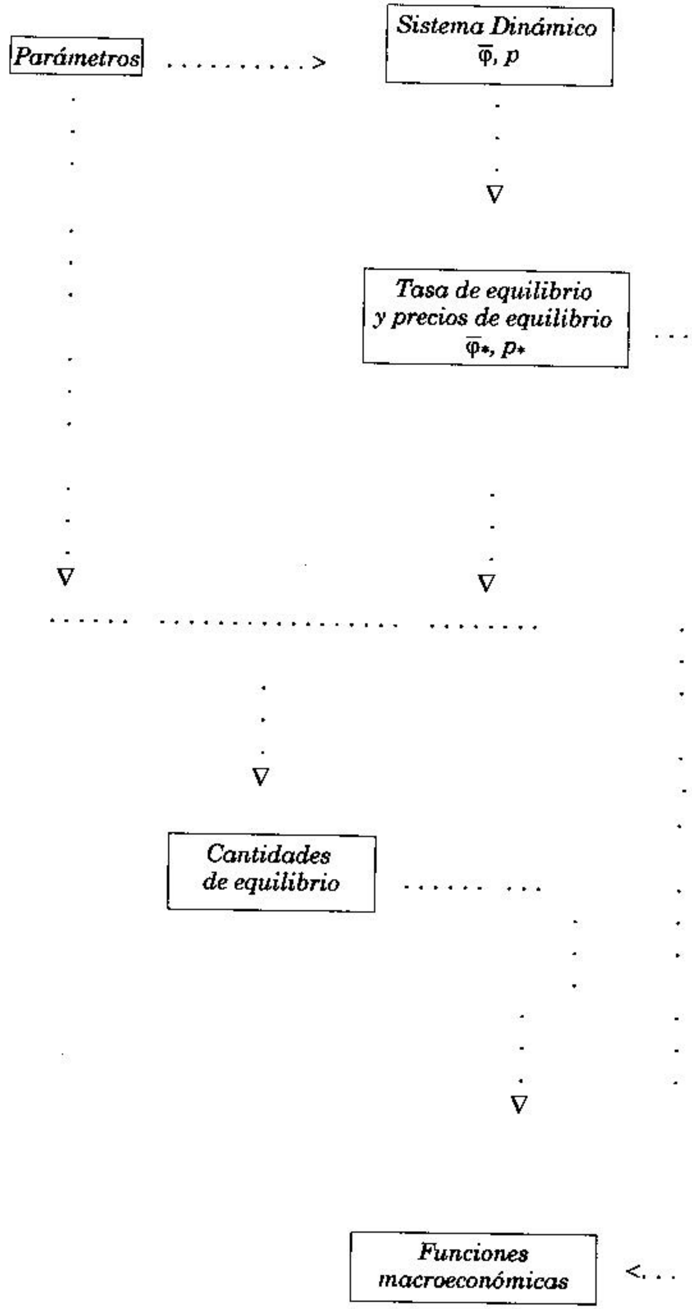


g = 0.03

Conclusiones

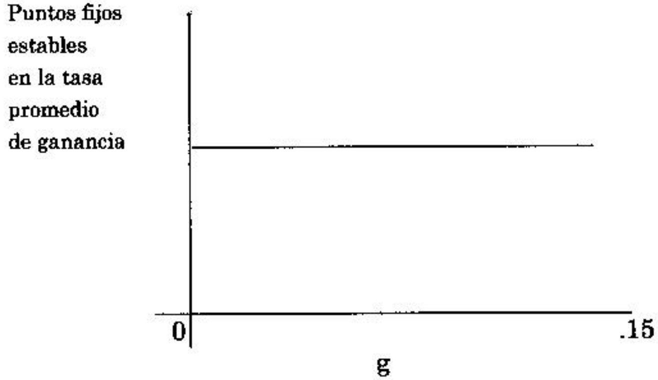
Se hizo un estudio numérico del modelo dinámico de J. Ibarra de precios y cantidades, que generaliza al modelo dinámico de Leontieff. Matemáticamente este modelo es computable usando un sistema dinámico no lineal de tiempos, discretos. En forma esquemática el modelo se puede representar con el siguiente diagrama de flujo.

* * *



* * *

Se realizó un estudio con todos los parámetros constantes excepto el parámetro $\boldsymbol{g}$ que puede fluctuar entre **0** y **.15**. Para este rango de valores, no se encontró un comportamiento complejo; por lo que el diagrama de bifurcación en este caso es muy simple. Si representamos en el eje horizontal los valores de $\boldsymbol{g} \in (0{,}0.15)$ y en el eje vertical los atractores del sistema dinámico obtenemos simplemente la gráfica *Bifurca* $(0 \le \boldsymbol{g} \le 0.15)$.



Bifurca
$0 \le g \le 0.15$

Al cambiar la matriz de periodos de producción a:

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 \end{vmatrix}$$

y definir al parámetro $\boldsymbol{g} = 0.03$ manteniendo todos los otros datos constantes se obtiene un comportamiento caótico en la tasa promedio de ganancia y en este caso el método de cálculo resulta inadecuado (iteración caótica).

Se hicieron otros cambios de parámetros resultando que en casi todos los casos el modelo resulta predictible.

* * *

Al aumentar el número de sectores en consideración es de esperarse que también en este caso, ocurran comportamientos complejos pues el número de parámetros libres es mayor; este ejercicio sólo es posible si se programa en una supercomputadora y para tal efecto se encuentra en desarrollo dicho sistema.

El modelo es más complejo a medida que se agregan más calidades de trabajo.

Si se asume la existencia de monopolios en algunos sectores es necesario variar otros parámetros del modelo, como por ejemplo, las tasas de desviaciones respecto a la tasa promedio. La reacción de la economía en estudio ante cambios de monopolios en cada sector serán tema de otra dirección de investigación.

No se descarta la posibilidad de usar otro método de cálculo de precios de equilibrio; sin embargo también cabe la posibilidad de que la iteración inherente al método también pueda ser caótica para algunos valores de los parámetros del modelo.

La utilidad de este estudio radica en el hecho de que el modelo puede resultar sensible respecto a cambios en los parámetros que lo definen. Esta información es valiosa para los econometristas que se dediquen a estimar estos parámetros, puesto que del error con que se estime depende la determinación de los precios y de la tasa promedio de ganancia; elementos con los que se determinan todas las otras variables y funciones asociadas al modelo.

Es importante el uso de modelos dinámicos no lineales en economía. Anteriormente se pensaba que el mundo era lineal; tanto los científicos exactos como los científicos sociales modelaban linealmente; un reflejo de esto lo constituyen los primeros modelos lineales y estáticos de Leontieff, W. Resolver estos modelos lineales, aun en el caso dinámico, era trivial; su entendimiento en el caso más complicado se reducía al cálculo de valores propios. El problema del cálculo de valores propios, a la luz de la tecnología moderna resulta trivial. Sin embargo con toda la tecnología de computación de que se dispone actualmente, los modelos dinámicos no lineales, especialmente los especificados en tiempo discreto, resultan un reto a entender. El consenso generalizado en toda la ciencia es que vivimos en un mundo donde casi todos los fenómenos son no lineales.

Apéndice 1

En lo que sigue se trabajará con sistemas dinámicos no lineales de tiempos discretos de la forma:

$$\begin{vmatrix} x_1(\kappa+1) \\ x_2(\kappa+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(\kappa+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \\ f_2(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \end{vmatrix} (0)$$

$$\kappa = 1,2,3,\ldots$$

donde

$$f_i : R^n \rightarrow R$$
$$x_i : N \rightarrow R$$

La dinámica de este tipo de sistemas dinámicos, aún en el caso lineal (es decir, con f_i funciones lineales), no ha sido completamente entendida y solo se conocen resultados parciales al respecto. De manera general estos sistemas se han estudiado numéricamente.

El problema principal en la teoría de sistemas dinámicos es: dado un sistema dinámico clasificar dinámicas: los atractores o repulsores periódicos y atractores caóticos.

En el caso de que exista una sola variable de estado, es decir n=1 en el sistema (0), no se tiene una clasificación completa de las posibles dinámicas, por lo que también en el estudio del caso de una sola variable, en general, se procede a aplicar métodos numéricos. Estos métodos numéricos dependen de la aritmética interna de la máquina, por lo que también el estudio numérico conlleva a problemas que aun no se han resuelto. De modo que al estudiar numéricamente un sistema dinámico como el sistema (0) solo se puede tener una imagen aproximada de las dinámicas.

Veamos los principales elementos que intervienen al enfrentar un sistema dinámico como el sistema (0).

Sea

$$f = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{vmatrix} .$$

Definición. La órbita hacia adelante del sistema dinámico (0) que empieza en

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \quad \text{es el conjunto}$$

$$O^+(x) = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}, f\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}, f^2\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}, \ldots, f^n\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}, \ldots \right\}$$

Dado un sistema dinámico de tiempos discretos el problema fundamental es investigar el comportamiento de $O^+(x)$ para cualquier $\boldsymbol{x}$.

Definición. El vector $(x_1,..,x_n)$ es un punto periódico de periodo $\boldsymbol{n}$ del sistema (0) si y sólo si $\boldsymbol{n}$ es el mínimo entero positivo tal que:

$$f^n\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix}$$

f^n significa la composición *n–ésima* de la función f.
El conjunto

$$Per\,(n,f) = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} : f^n\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} \right\}$$

es el conjunto de puntos periódicos de periodo $\boldsymbol{n}$.

Dado un $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} \in Per\,(n, f)$ el conjunto:

$$ciclo\,(x) = ciclo\left(n, f, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} \right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix}, f^2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix}, \ldots, f^n\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\x_n\end{pmatrix} \right\}$$

es la órbita periódica asociada. Si el número de elementos de *ciclo* (x) es $\boldsymbol{r}$ entonces se dice que hay un *r–ciclo*.

Definición. Un subconjunto $A \subset R^n$ es un atractor del sistema dinámico (0) si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Existe un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\bigcap_{\tau > 0} f^t(U) = A$;

b) Para cualquier abierto $V \supset A$ existe una $t_0 > 0$ tal que para toda $t > t_0\, f^t(U) \subset V$

c) El conjunto A es invariante: $f(A) = A$.

La cuenca de atracción asociada al atractor A es el conjunto:

$$B = \{ x \in R^n : \liminf_{t \to \infty\, y \in A} \| f^t(x) - y \| = 0 \} = \bigcup_{\tau > 0} f^{-t}(U)$$

Por ejemplo si para algún x, $B = ciclo(x)$, a B se le llama atractor periódico.

$$\|(x_1\, x_2 \ldots x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1,\ldots,n} x_i^2} \qquad \text{es la norma euclidiana en } \mathbb{R}^n.$$

Si la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$, un punto periódico de periodo n, $(x_1, \ldots, x_n)$, es estable (es un atractor periódico) si y sólo si para cualquier $(y_1, \ldots, y_n) \in ciclo(x)$ el jacobiano $D f^n(y_1, \ldots, y_n)$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que uno.

Si la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$, un punto periódico de periodo n, $(x_1, \ldots, x_n)$, es inestable (repulsor periódico) si y sólo para cualquier $(y_1, \ldots, y_n) \in ciclo(x)$ el jacobiano $D f^n(y_1, \ldots, y_n)$ tiene por lo menos un valor propio con módulo mayor que uno.

Se desconoce un criterio general para determinar la existencia de otro tipo de atractores.

Más detalles sobre lo anterior se puede ver en J. Guckenheimer y P. Holmes (1983). En contraste con las dinámicas periódicas se tienen las dinámicas caóticas:

Definición. Un atractor es extraño si toda órbita $O^+(x)$ con $x \in A$, es sensible respecto a condiciones iniciales, es decir:

$\exists y \in A, \wedge \exists \delta > 0, \wedge t_0 > 0$ *tal que* $\forall t > t_0 \| f^t(x) - f^t(y) \| > \delta$.

Definición. El sistema dinámico (0) es caótico si posee un atractor extraño.

Por lo regular, los atractores extraños son objetos fractales; conjuntos a los que se les puede asociar una dimensión topológica (dimensión de Haussdorff) no entera. Por ejemplo los conjuntos de Cantor o el triángulo de Sierpinsky pertenecen a la categoría de los fractales.

Referencias

- Arrowsmith, D. K. and C.P. Place (1991), *An Introduction to Dynamical Systems*, Oxford University Press.
- Baum, E. B. (1988), *Neural Nets for Economists. The ec-conomy as an Evolving Complex System*, SFI *Studies in the Sciences of Complexity*, Addison–Wesley.
- Flaschel, P., R. Franke and W. Semmler (1995), *Nonlinear Macrodynamics: Instability, Fluctuations and Growth in Monetary Economics*, MIT, Press.
- Ford, J. (1986), "Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable", Chaotic Dynamics and Fractals, pp. 1–52.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer–Verlag.
- Guevara, M.R. and L. Glass (1982), "Phase Locking, Period Doubling Bifurcations and Chaos in a Mathematical Model of a Periodically Driven Oscillator: A theory for the Entrainment of Biological Oscillators and the Generation of Cardiac Dysrhythmias", *J. Math. Biology*, núm. 14, pp. 1–23.
- Gabisch, G., and H. Walter (1987), *Business Cycle Theory. A Survey of Methods and Concepts. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer–Verlag.
- Guzmán, J. R. and H. Carrillo, "A Dynamical System Proof of the Little Fermat Theorem", *Reporte de Investigación 94–Y*, Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Facultad de Ciencias, UNAM.
- Ibarra, J. (1995), *Teoría Económica Dinámica y Planificación*, Cuadernos de Economía, Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM.
- Ibarra, J. (1996), *Comunicación Personal.*

- Ibarra, J. (1998), *Comparación entre la propuesta teórica de J. Ibarra y una de L. Pasinetti,* no publicado.
- Leontieff, W. (1936), "Qualitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States", *Review of Economics Statistics*, núm. 18, pp.105–125.
- Leontieff, W. (1953), *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press.
- Leontieff, W. (1966), *Input Output Analysis*, Oxford University Press.
- Lorenz, E. N. (1963), "Deterministic Non Periodic Flows", *J. Atmospheric Sci.*, núm. 20, pp. 130–141.
- Pasinetti, L. (1981), *Structural Change and Economic Growth*, Cambridge University Press.
- Percival, I. and F. Vivaldi (1987), "Arithmetical Properties of Chaotic Motions", *Physica*, num. 25 D, pp. 105–130.
- Terman, D. (1991), *Chaotic Spikes Arising from a Model of Bursting in Excitable Membranes*, Siam J. Appl. Math, pp. 1418–1450.